KOMPLEKS ANALYSE OG DIFFERENSIALLIKNINGER

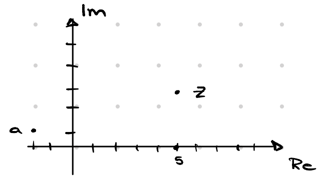
Komplekse tall

→ kombinasjon mellom reelle og imaginære tall

$z = \underbrace{5 + 3i}_{\text{kompleks tall}}$ (5: reell, 3i: imaginær)

Re(z) = 5 (reell del)

Im(z) = 3 (imaginær del)



$a = -2 + i$

$b = 4 - 3i$

$i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1$

Kompleks konjugat: $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi \longrightarrow \operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z \qquad \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$

Norm: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (avstand fra z til origo) $\quad |z - z_0| = r \rightarrow z_0 = \text{sentrum}, \ r = \text{radius}$

Absoluttverdi-identiteter: $|z| = \sqrt{z\bar{z}} \qquad |z^2| = z\bar{z} \qquad |z| = |\bar{z}| \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad |z^n| = |z|^n$

Trekantulikheten: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Polarform

$z = x + iy$ som et punkt (x, y) i komplekst plan

(r, θ) → r avstand fra punktet til origo

θ vinkelen mellom x-aksen og strålen fra origo til punktet

$r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$

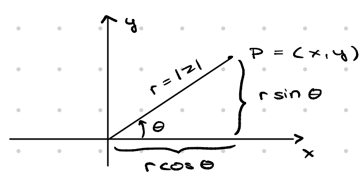
↳ **"modulo" / norm**

absoluttverdien til z

$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{x}{r}$

θ = argumentet til z

$\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{y}{r}$



$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ → polar representasjon

$\operatorname{Re} z = x = r\cos\theta$

$\operatorname{Im} z = y = r\sin\theta$

$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \dfrac{y}{x} \rightarrow \boxed{\theta = \arctan\dfrac{y}{x}} \qquad \boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|} = \sqrt{z\bar{z}}$

Finne n'te roten til et tall: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$

↳ gir n løsninger: en for hver k

Ligger på sirkel med radius lik n'te roten av r

Komplekse røtter

$\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$

$z^n = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\theta + 2k\pi)\frac{1}{n}}$

$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi \qquad \cos(\operatorname{Arg} z) = \dfrac{x}{|z|} \qquad \sin(\operatorname{Arg} z) = \dfrac{y}{|z|}$

$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2\pi k : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ (Arg z: singel-verdi)

↳ multi-verdi

$(\arg z = \theta + 2\pi k)$

$\arg \bar{z} = -\arg z \qquad \arg(-z) = \arg z + \pi$

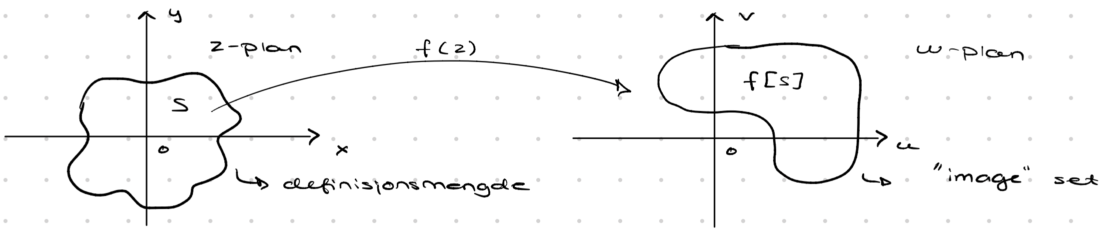
De Moivre's identitet $\quad \boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$

Komplekse funksjoner

- Definisjonsmengde : et område i det komplekse plan (S ?)
- Funksjonsverdi : komplekst tall til hvert punkt i definisjonsmengden , w

$w = f(z)$ $\quad w = u + iv$ $\quad$ (u og v reelle funksjoner av z (og av x og y))

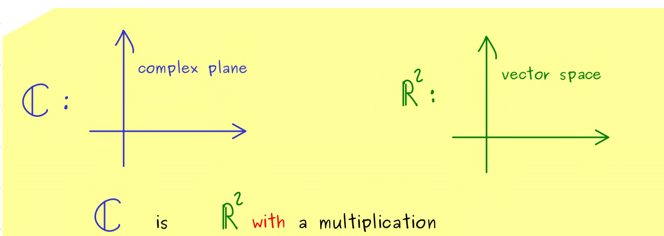
$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$



(?)

$z \longmapsto r(\cos\theta + i\sin\theta)\, z$ $\quad \longrightarrow$ rotasjon om vinkelen θ

$z \longmapsto rz \quad , r > 0$ $\quad \longrightarrow$ dilasjon (?) av faktor r



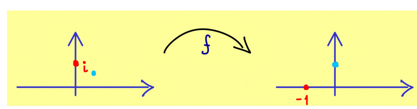
ℂ er $\mathbb{R}^2$, men har en ekstra operasjon

En map fra ℂ til ℂ er det samme som fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$

Remember: Each map $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ induces a map $f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (and vice versa)

→ Eks: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \to z^2$



$x + iy \to (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$

↳ Kalkulere : tar reelle og imaginær del av z og regner med disse

Kan definere mappen f_R : reell del er første koordinat, mens imaginær del er andre koordinat:

$f_R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_R\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 \\ 2ab \end{pmatrix}$

→ Ved å parametrisere den $\left(\left. \begin{matrix} v = 2xy \\ y = \frac{v}{2x} \end{matrix} \right\} x^2 - \frac{v}{2x} \right)$ kan man se om likningen er en sirkel / hyperbel osv

- Lineær approksimasjon og mapping

- mapping i polarkoordinater :

$z = r\cos\theta + ir\sin\theta \qquad w = f(z)$

$\longrightarrow w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$

$\rho(r,\theta) = |f(r\cos\theta + ir\sin\theta)|$

$\phi(r,\theta) = \arg(f(r\cos\theta + ir\sin\theta))$

Åpne mengder

- r-nabolag av z_0 er alle mengder av komplekse tall z hvor $|z-z_0| < r$ $\Rightarrow$ $B_r(z_0)$
  (inkluderer ikke punktene på sirkelen $|z-z_0| = r$)

- slettet nabolag av z_0 er et nabolag av z_0 hvor sentrum er utelatt $\Rightarrow$ $B'_r(z_0)$
  $B'_r(z_0) = \{z : 0 < |z-z_0| < r\}$

- innvendig punkt av S: hvis det finnes et nabolag av z_0 som er fullt inneholdt i S
- grensepunkt av S : hvis hvert nabolag av z inneholder minst et punkt i S og et punkt ikke i S
- grensen av S : mengden av alle grensepunktene til z

- Åpen mengde: en delmengde S av komplekse tall er åpen hvis ethvert punkt i S er et innvendig punkt av S
- Åpen disk: r-nabolag, $B_r(z_0)$ er en åpen disk med radius r og sentrum z_0

- Lukket mengde: mengde som inneholder alle grensepunkter
- Lukket disk: inneholder alle grensepunkter i sirkelen $|z-z_0| = r$ (disken: $\{z : |z-z_0| \leq r\}$, med r = radius, z_0 = sentrum

Sammenkoblede mengder

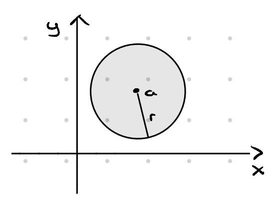
- Polygonal linje: endelig union av lukkede linjesegmenter L_j, $j = 1, \ldots, m$ slik at enden av hver L_j treffer starten av L_{j+1} $(j = 1, \ldots, m-1)$
- Delmengde Ω kalles polygonalt sammenkoblet hvis enhver to punkter i Ω kan kobles av en polygonal linje som er fullstendig inneholdt i delmengden.

- Region : ikke-tomt åpent og polygonalt sammenkoblet delmengde av det komplekse planet

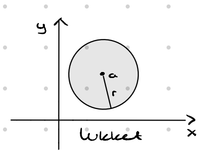
Sirkel

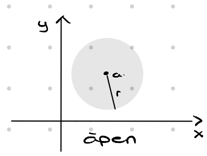
- reelle plan: $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r^2$ r = radius (x_1, y_1) = sentrum
- komplekse plan: $|z-z_0| = r$ $z = x+iy$ $z_0 = (x_0 + iy_0)$

  $|z| = 1$ $\rightarrow$ enhetssirkelen



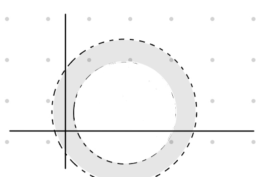
Lukket sirkelskive: $|z-z_0| \leq p$ (punkter på og innenfor kanten)
Åpen sirkelskive : $|z-z_0| < p$ (inneholder ikke punkter på kanten)





Annulus

- Åpen annulus: $p_1 < |z-z_0| < p_2$



Sirkel:	$x^2 + y^2 = a^2$
Parabel:	$y^2 - 4ax = 0$
Ellipse:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Hyperbel:	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Grenser og kontinuitet

→ Likt for komplekse funksjoner som for reelle

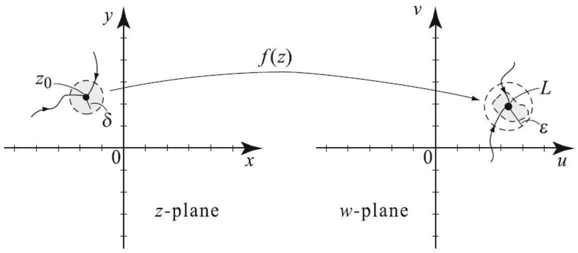


Fig. 2.8 To say that $f(z) \to L$ as $z \to z_0$ is a strong assertion; it means that no matter how z approaches z_0, the distance $|f(z) - L|$ tends to 0.

Et komplekst tall L er en grense av $f(z)$ når z nærmer seg z_0 hvis det for en vilkårlig $\varepsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at

$$z \in S \text{ og } 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - L| < \varepsilon$$

Da eksistere $\lim_{z \to z_0} f(z)$ og $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$

Bundet: En funksjon g er bundet på en mengde S hvis det finnes et positivt reelt tall M slik at $|g(z)| \leq M$ for alle z i S

Kontinuerlige funksjoner hvis: $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

- hvis det for ethvert $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $z \in S$, $|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

→ kontinuerlig på en mengde hvis kontinuerlig i alle punkter i mengden

- Fjernbar diskontuitet
- Ikke-fjernbar diskontinuitet

(?) $\lim_{z \to z_0} (\text{Arg } z)^2 = \lim_{z \to z_0} |\text{Arg } z|^2 = \left(\lim_{z \to z_0} |\text{Arg } z|\right)^2$

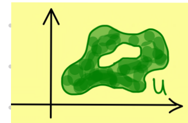
↳ siden Arg z alltid er reelt

Kontinuitet av Logaritmer

Kompleks derivasjon:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$ → deriverbar hvis grensen eksisterer

$\Delta z \to 0$ kan skje fra mange kanter ⇒ brøken over må gå mot samme verdi fra alle kanter hvis grensen skal eksistere



$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ deriverbar i z_0 : har kun betydning rundt punktet

⇒ definisjonsområdet trenger ikke være hele det komplekse plan, men et åpent sett U

Definisjon: $U \subseteq \mathbb{C}$ er åpen hvis punktene på "kanten" ikke er inkludert

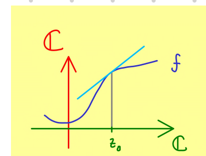
Deriverbarhet:

$U \subseteq \mathbb{C}$ åpen, $z_0 \in U$ $\quad f: U \to \mathbb{C}$ kalles (kompleks) deriverbar i $z_0 \in U$ hvis:

↳ definisjonsmengde

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$ eksisterer.

↳ beskriver stigningstallet



I komplekst plan er både input og output i det komplekse plan:

- → korrekt visualisering bør inneholde 4 plan.
- → lineær approksimasjon er en tilnærming, men mangler mye info
- → funksjonen kalles Δ. $\quad \Delta_{f, z_0}: U \to \mathbb{C}$ med $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot \Delta_{f, z_0}(z)$ for alle $z \in U$ og Δ_{f, z_0} er kontinuerlig i z_0

$$f'(z_0) := \Delta_{f, z_0}(z_0) = \boxed{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}$$ kalles den komplekst deriverte av f i z_0

→ Eks: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad z \mapsto \bar{z}$ er ikke deriverbar i $z_0 = 0$ (ulik grense fra ulik retning) og ikke deriverbar i noe område.

Analytisk funksjon

hvis funksjonen er definert og deriverbar i alle punkt i en (åpen) mengde

$U \subseteq \mathbb{C}$ åpen $\quad f: U \to \mathbb{C}$ analytisk (på U) hvis f er (kompleks) deriverbar i enhver $z_0 \in U$

↳ definisjonsmengden

→ analytisk i et punkt hvis den er deriverbar i et lite område rundt punktet + punktet

Hel (entire) funksjon

: analytisk overalt. Analytisk på $\mathbb{C}$. Definert på hele komplekse plan. Definisjonsmengden er hele det komplekse planet (største mulig definisjonsmengde)

Egenskaper:

- f analytisk ⇒ f kontinuerlig
- $f, g: U \to \mathbb{C}$ analytisk ⇒ $f + g$, $f \cdot g$ analytisk
- addisjonsregel, produktregel, divisjonsregel og kjerneregel for deriverte holder.
- polynom: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0$ er en hel funksjon
- rasjonelle funksjoner: $f: \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ er analytisk

  ↳ $\{z \in \mathbb{C} \mid q(z) = 0\}$ $\qquad$ ↳ polynom?

Partielt deriverte:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h}$$

Chain rule:

$U(t) = u(x(t), y(t))$ deriverbar for alle $t \in I$: $\quad \boxed{\frac{dU}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}}$

Mean value theorem:

u deriverbar funksjon på åpen delmengde ω i $\mathbb{R}^2$

Linjesegment $[z_1, z_2]$ som kobler sammen $z_1 = (x_1, y_1)$ til $z_2 = (x_2, y_2)$ ligger fullstendig i ω

$\Rightarrow$ Da eksisterer det et punkt $z = (x_0, y_0)$ på $[z_1, z_2]$ slik at

$$u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = u_x(z)(x_2 - x_1) + u_y(z)(y_2 - y_1)$$

Derivasjon av rasjonelle funksjon (?)

$\to$ f analytisk på område Ω

$\to$ $z_0 \in \Omega$

$$g(z) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{array} \right\} \text{ g analytisk i } \Omega$$

- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er (kompleks) deriverbar i $z_0 \in \mathbb{C}$ hvis det finnes $f'(z_0) \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \underbrace{\underbrace{f(z_0)}_{\text{konstant term}} + \underbrace{\overbrace{f'(z_0)}^{\text{stigning}} \cdot (z - z_0)}_{\text{lineær map}}}_{\text{Lineær approksimasjon av } f \text{ rundt } z_0} + \underbrace{\varphi(z)}_{\substack{\text{error term} \\ \varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}}}$$

$\to$ må gå raskere mot null enn den lineære funksjonen

$\iff$

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er (totalt) deriverbar i $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ hvis det finnes en matrise $J \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ og en map $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

med $f_R\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f_R\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) + J\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) + \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$\to$ error term (må gå raskere mot null enn den lineære funksjonen)

$\to$ Lineær approksimasjon

og den Jakobiske matrisen ved $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ har formen $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

J is called the Jacobian matrix of f_R at $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$J = \begin{pmatrix} | & | \\ \frac{\partial f_R}{\partial x} & \frac{\partial f_R}{\partial y} \\ | & | \end{pmatrix} \quad \left(\text{evaluate at } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)$$

$\to$ de partielt deriverte

$\iff$

- for $f_R\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ er Cauchy-Riemann-Likningene tilfredsstilt

Cauchy-Riemann-Likningene

$\to$ test for å avgjøre om en kompleks funksjon er analytisk

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analytisk i område D hvis og bare hvis de førsteordens partielt deriverte oppfyller

$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$ i hele D $\qquad$ [$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ (derivert av u med hensyn på x)]

$$f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$$
$$f'(x + iy) = v_y(x, y) - iu_y(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Kompleks eksponentialfunksjon

$f(z) = \exp z = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

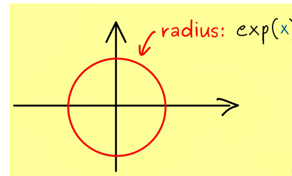
$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

→ Potensrekke med konvergensradius $r = \infty$

$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = \exp z$

- For reelle z ($z = x$) er den lik den reelle eksponentialfunksjonen
- Analytisk for alle z
- $(e^z)' = e^z$
- $e^{z+w} = e^z e^w$ $\quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ $\quad e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}$

$e^{i\pi} = -1$



$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ = Eulers identitet → $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

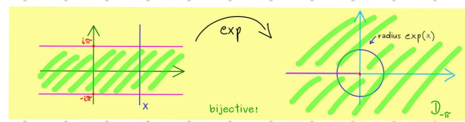
$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x e^{-iy} = e^x(\cos y - i\sin y)$

⇓

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ → $|z| = |re^{i\theta}|$ og $|z| = r$ ⇒ $|e^{i\theta}| = 1$ $\quad \arg z = \theta$

↳ $\cos\theta$ og $\sin\theta$ periodiske med 2π → $e^{i\theta}$ periodisk med 2π ($e^{i\theta}$ og $e^{i(\theta+2n\pi)}$ samme tall når n heltall)

⇒ Periodisitet: $e^{z+2\pi i\cdot k} = e^z$ → ikke injektiv



Trigonometriske og hyperbolske funksjoner

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ $\qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

$(\cos z)' = -\sin z$ $\quad (\cosh z)' = \sinh z$

$(\sin z)' = \cos z$ $\quad (\sinh z)' = \cosh z$

→ Potensrekke: $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n-1}}{(2n)!}$ $\quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

- even funksjon: $f(z) = f(-z)$
- odd funksjon: $f(-z) = -f(z)$

$\cos(-z) = \cos z$ (even) $\quad \cos(z+2\pi) = \cos z$ $\quad \cos(z+\frac{\pi}{2}) = -\sin z$

$\sin(-z) = -\sin z$ (odd) $\quad \sin(z+2\pi) = \sin z$ $\quad \sin(z+\frac{\pi}{2}) = \cos z$

?

$e^{iz} = \cos z + i\sin z$ $\quad e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z)$ $\quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1$

$\cos z = \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y$

$\sin z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$

$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$

$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$

$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$

$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$

$\operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$

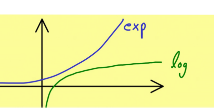
$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$

$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ $\qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

Logaritmer og potenser

$\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ (bijektiv)

$\log: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ (ikke injektiv)



Naturlig logaritme: $\ln z$ → Invers til eksponentialfunksjon $\quad w = \ln z$ → $e^w = z$ $\quad$ bijektiv

$z = re^{i\theta}$ $\quad w = u + iv$ → $e^w = re^{i\theta}$ $\quad e^u = r$ → $u = \ln r$ $\quad e^{iv} = e^{i\theta}$ → $iv = i\theta$

$w = \ln z = u + iv = \ln r + i\theta$

→ prinsipalverdi: $\operatorname{Ln} z = \ln r + i\operatorname{Arg} z$ (andre verdier: $\ln z = \operatorname{Ln} z + 2n\pi i$)

Kompleks logaritme: $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$

$\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$

$(\ln x)^y = y\ln x$

↳ analytiske overalt, bortsett fra i $z = 0$ og negativ del av reelle akse

$(\ln z)' = \frac{1}{z}$

Komplekse potenser: $z^c = e^{c\ln z}$ → prinsipalverdi: $z^c = e^{c\operatorname{Ln} z}$

$a^z = e^{z\ln a}$ $\quad (e^z = e^z)$

$(a^{c_1})^{c_2} = a^{c_1 \cdot c_2}$

$(a^{z_1})^{z_2} \neq a^{z_1 \cdot z_2}$

Kompleks integrasjon

Kurver, områder og parametrisering

- En kurve kan defineres som en graf av en kontinuerli funksjon $y = f(x)$
  Kan skrives i parametrisk form ved å uttrykke x og y som funksjoner av en variabel t (eller θ)
- En parametrisk form av en kurve er en representasjon av kurven ved et par med likninger $x = x(t)$ og $y = y(t)$,
  hvor t inneholder et sett av reelle tall, vanligvis i et lukket intervall $[a,b]$. Hver verdi av t bestemme et punkt
  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ som følger kurva fra a til b. Startpunkt $= \gamma(a)$. Sluttpunkt $= \gamma(b)$
- En kurve er lukket hvis $\gamma(a) = \gamma(b)$

- Med klokka = negativ   Mot klokka = positiv

- Polygonale linjer $\gamma = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ er unionen av linje-segmenter $[z_1, z_2], [z_2, z_3], \dots, [z_{n-1}, z_n]$
  Det er en punktvis lineær linje med startpunkt z_1 og sluttpunkt z_n, og kan ha selv-krysninger

- Kurver / polygonale linjer er enkle hvis den ikke krysser seg selv (unntatt endepunktene)
  er lukket hvis start- og sluttpunkt er sammenfallende ($z_1 = z_n$)

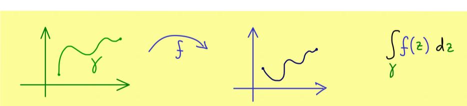
Se neste side for parametrisering

Enkeltsammenhengende område: område (D) hvor alle enkle, lukkede kurver bare omslutter punkter som er med i D
Flersammenhengende område er ikke enkeltsammenhengende (har "hull")

Linjeintegral i det komplekse plan

- Kompleks parametrisert form av en kurve: $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$
  → Graf med funksjon av kompleks verdi og reell variabel / parameter t

- Integrerer funksjonen $f(z)$ langs en integrasjonsvei C i det komplekse plan. Kurven C representeres ved $z(t) = x(t) + iy(t)$
  Skrives som: $\int_C f(z)\,dz$ For lukket kurve: $\oint_C f(z)\,dz$ (defineres vha Riemann-summer)

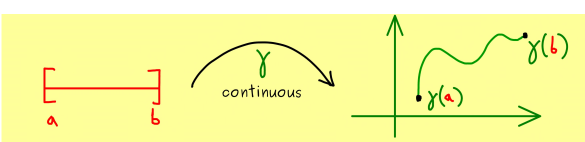


→ mapper ofte funksjon fra kompleks definisjonsmengde til kompleks verdimengde

- Punktvis kontinuerlige komplekse funksjoner er, som reelle, også Riemann integrerbare:

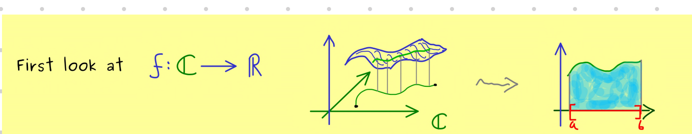
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} : \quad \int_a^b \gamma(t)\,dt := \underbrace{\int_a^b \mathrm{Re}(\gamma(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(\gamma(t))\,dt}_{\text{Riemann-integraler i } \mathbb{R}}$$

$$\mathrm{Re}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)\,dt$$
$$\mathrm{Im}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\,dt$$



$$\int_{a,C}^{b} (af(z) \pm bg(z))\,dz = a\int_{a,C}^{b} f(z) \pm b\int_{a,C}^{b} g(z)$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$



$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$$

C enhetssirkelen mot klokka: $\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$

1. Bruk av integrasjonsveien (Path integral / Countour integral)

→ Kan brukes på alle kontinuerlige komplekse funksjoner, både analytiske og ikke

$z(t)$ med $a \le t \le b$ representerer integrasjonsveien C: $\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$

γ' gir stigningstall for reell og imaginær del av f

γ en path over et lukket intervall $[a,b]$
f kontinuerlig kompleks-verdi-funksjon definert på grafen av γ } Linjeintegralet: $\int_\gamma f(\gamma(t))\,\gamma'(t))\,dt$

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

2. Ubestemt integrasjon av analytiske funksjoner

→ Brukes når integraler av komplekse funksjoner ikke er avhengige av integrasjonsveien C, men bare endepunktene

Kalles uavhengighet av vei og gjelder alltid for integrasjon av analytiske komplekse funksjoner (i de analytiske områdene)

$f(z)$ analytisk i enkeltsammenhengde område D ⇒ integralet av $f(z)$ er uavhengig av vei i D

- Finnes en funksjon $F(z)$ slik at $F'(z) = f(z)$ overalt i D (F antiderivert av f i D)
- C en kurve i D ⇒ integralet av $f(z)$ langs C er kun avhengig av endepunktene til C. $I = \int_C f(z)\,dz$
  C fra z_0 til z_1: $\int_C f(z)dz = \int_{0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$
- Integralet av f over alle lukkede veier er 0

ML-ulikheten

→ Gir en øvre begrensning for absoluttverdien av et komplekst intervall

L lengden av C
M en konstant slik at $|f(z)| \le M$ overalt på C } $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML$

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M\,\ell(\gamma)$$

Buelengde: $ds = \ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$

Parametrisering

Parametrisering av direkte linjesegment:

$[z_1, z_2]$ → γ over $[0,1]$ definert av

$\gamma(t) = (1-t)z_1 + t z_2 \quad 0 \le t \le 1$

Initiell punkt $\gamma(0) = z_1$, Terminell punkt $\gamma(1) = z_2$

Parametrisering av sirkel/bue

γ over $\alpha \le t \le \beta$

$\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

Initiell punkt: $e^{i\alpha}$, Terminell punkt: $e^{i\beta}$

Med sentrum: $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

Parametrisering av polygonale veier

$\gamma = [z_1, z_2, \dots, z_n]$

→ Finner likningene til $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$

Setter sammen:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-t)z_1 + t z_2 & 0 \le t \le 1 \\ (1-t)z_2 + t z_3 & 1 \le t \le 2 \\ \vdots & \\ (1-t)z_n + t z_{n+1} & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

evt: $(1-t)z_{n+1} + t z_1$

Cauchys integralteorem

Greens teorem:

γ enkel, lukket path med positiv orientering

D innvendig region til γ

$P(x,y)$ og $Q(x,y)$ (og de første partielt deriverte)

er kontinuerlige reelle funksjoner på $\bar{D} = D \cup \gamma$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\hookrightarrow \int_a^b \Big(P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t) \Big)\, dt$$

Cauchys teorem for enkle lukkede paths

f analytisk funksjon på område U

U inneholder enkel lukket path γ + innvendig

f' kontinuerlig på U

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Basic idea: $0 = \int_\gamma + \int_{\gamma'} = \oint_{\gamma + \gamma'}$

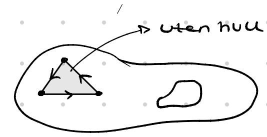
Cauchy-Goursat teorem

Δ er et lukket triangel inneholdt i region D

f analytisk funksjon på D

$\partial\Delta$ betegner grensene av Δ med positiv orientering

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$



Cauchys teorem for stjerneformede definisjonsmengder

Konveks: Delmengde V av det komplekse plan $\mathbb{C}$ hvor det for alle $a, b \in V$ finnes

$(1-t)\,a + tb \in V$ for alle $t \in [0,1]$

(inneholder alle lukkede linje-segmenter med endepunkter i mengden)

fra hvilken som helst punkt i området kan du treffe alle andre punkter i området

fra noen få punkter

Stjerneformet: Delmengde V i det komplekse plan $\mathbb{C}$ stjerneformet om z_0 i V hvis for alle $z \in V$ finnes:

$(1-t)\,z_0 + tz \in V$ for alle $t \in [0,1]$

(inneholder alle lukkede linje-segmenter som starter fra et fiksert punkt z_0 og ender i et vilkårlig punkt i mengden)

Cauchys integralteorem for enkeltsammenhengende område

$f(z)$ analytisk i et enkeltsammenhengende område D

Inneholder en enkelt lukket path γ og det innvendige

f' kontinuerlig på D

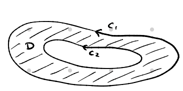
$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Cauchys integralteorem for flersammenhengende områder

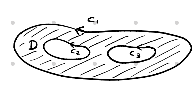
$f(z)$ analytisk i et eller annet område D_1 som inneholder D

D_1 inneholder randkurvene C_1 og C_2 (indre og ytre randkurve til D)

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$



$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz$$



$$\int_C z^m\,dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{når } n = 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

når C positivt orientert enkel, lukket path som inneholder 0

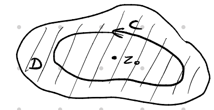
Cauchys integralformel

$f(z)$ analytisk i et enkeltsammenhengende område D
z_0 punkt i D
C er en enkel lukket kurve i D som omslutter z_0

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)}$$ (når C mot klokka)

$$\downarrow$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$



→ Hvis flersammenhengende område : må dele opp kurven C , som (i feks. C_2 og C_3)

Derivasjon av analytiske funksjoner

→ Komplekse funksjoner som er deriverbare én gang ⇒ eksisterer alle n'te ordens deriverte

$f(z)$ analytisk i et område D ⇒ har den deriverte av alle ordener, og alle er analytiske funksjoner i D
C er en enkelt, lukket kurve i D som omslutter z_0 og har hele sitt indre innenfor D

Verdien av den deriverte i punktet z_0:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$ (Integrasjon mot klokka)

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz$$

$$\vdots$$

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz}$$

Cauchys ulikhet

→ Derivasjon av analytiske funksjoner kombinert med ML-ulikheten

$f(z)$ analytisk på og innenfor sirkelen (disken) $|z-z_0| = r$

$$\boxed{|f^{(n)}(z_0)| \leq n!\frac{M}{r^n}}$$ $n = 1, 2, \dots$ $r > 0$

der $\underline{|f(z)| \leq M}$ på sirkelen

Liouvilles teorem

$f(z)$ analytisk overalt og begrenset i absoluttverdi ⇒ $f(z)$ konstant

Maximum og minimum - prinsipp:

En analytisk funksjon har en gjennomsnittsverdi (av f over en sirkel i D med sentrum i z)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} f(z+Re^{it})\,dt}_{\text{Riemann-integral av en kompleks funksjon av } t}$$

Del-gjennomsnitt (?) : $|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z+Re^{it})\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+Re^{it})|\,dt$

Komplekse følger og rekker

Følger og rekke av komplekse tall

En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

→ konvergerer til et komplekst tall L (her grense L når n går mot ∞):

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ hvis det for enhver $\varepsilon > 0$ eksisterer en integer N slik at $|a_n - L| < \varepsilon$ for enhver $n \geq N$

→ divergerer ellers

En vendelig kompleks rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hvor $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ er en vendelig rekke av komplekse tall

→ konvergerer til et komplekst tall $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hvis $\lim_{n\to\infty} S_n = s$

→ divergerer ellers

Følger og rekker av funksjoner

- En funksjon f_n konvergerer punktvis til en funksjon f hvis $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ for enhver z i E → i en mengde
- En rekke av funksjoner $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergerer punktvis hvis en følge av delvise summer $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ konvergerer punktvis på mengden
- En følge av funksjoner, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer uniformt til f på mengden $(\lim_{n\to\infty} f_n = f)$ [hvis $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$] ($= \sup_{z\in E} |f_n(z) - f(z)|$)
- En rekke av funksjoner, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergerer uniformt på mengden hvis følgen av delvise summer $s_n = \sum_{k=1}^{n}$ konvergerer uniformt på mengden
- En kompleks rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er absolutt konvergent hvis rekka $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ er konvergent

Weierstrass M-test

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ en følge av funksjoner i en delmengde E av $\mathbb{C}$, og $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ en følge av tall slik at for alle n, så er:

- $|u_n(z)| \leq M_n$ for alle z i E
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$

så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uniformt og absolutt på E

n-te term test for divergens

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ eller $\lim_{n\to\infty} a_n$ eksisterer ikke

For all sequences $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U\setminus\{z_0\}$ with $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$, the sequence $\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n - z_0}$ converges (to the same number).

↳ Deriverbar

?

Sammenlikningstest

, absolutt konvergens

a_n komplekse tall, b_n reelt tall

$|a_n| \leq b_n$ for alle $n \geq n_0$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolutt konvergent

$\left|\frac{1}{n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Konvergens for absolutt konvergente rekker → $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer

Forholdstest

a_n ikke-null komplekst tall

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt hvis $L < 1$

divergerer hvis $L > 1$

ugyldig hvis $L = 1$

Rot-test

a_n komplekst tall

$$L = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt hvis $L < 1$

divergerer hvis $L > 1$

ugyldig hvis $L = 1$

Potensrekker

Kompleks potensrekke: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n$

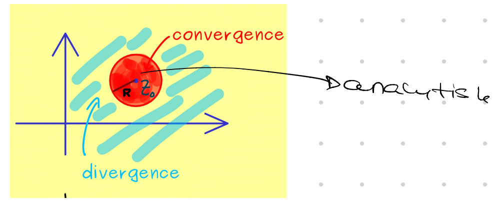
hvor z er en kompleks variabel, z_0 er et fiksert kompleks tall kalt sentrum,

a_n er konstanter, komplekse tall kalt koeffisienter

- For $z \neq z_0$ kan rekka konvergere eller divergere
  - → Konvergerer i $z = z_1$ $(\neq z_0)$ ⇒ konvergerer for alle z nærmere z_0 enn z_1 $\quad |z-z_0| < |z_1 - z_0|$
  - → Divergerer i $z = z_2$ ⇒ divergerer for alle z lengre vekk fra z_0 enn z_2 $\quad |z-z_0| > |z_2 - z_0|$

$|z-z_0| < R$ kalles disk av konvergens

$|z-z_0| = R$ kalles konvergenssirkel



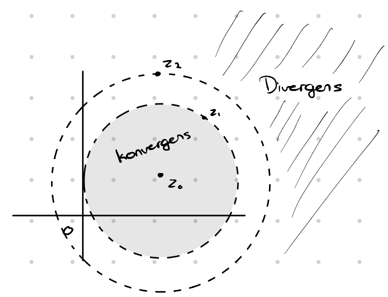
Konvergensradius

→ Unik for en potensrekke (finnes kun en)

→ R er det største tallet slik at potensrekka konvergerer for alle z i åpen sirkelskive med radius R og sentrum i z_0

$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ → $L \neq 0$ ⇒ Konvergensradiusen er: $R = \frac{1}{L}$ $\quad L = 0 \Rightarrow R = \infty$

Forholdstesten



Cauchy - Hadamard

$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ $\quad \frac{1}{0} = \infty \quad \frac{1}{\infty} = 0$

Konvergens for potensrekke:

- Konvergerer bare i $z = z_0$: $R = 0$
- Konvergerer i hele det komplekse plan : $R = \infty$ (for alle z og uniformt på alle lukkede disker $|z-z_0| \leq r$)
- Konvergerer innenfor sirkel med sentrum i z_0 : $0 < R < \infty$
  - → konvergerer absolutt: $|z-z_0| < R$
  - → divergerer $|z-z_0| > R$
  - → konvergerer uniformt på lukket disk $|z-z_0| \leq r$ for $r < R$

→ Enhver analytisk funksjon kan uttrykkes som en potensrekke når den er begrenset til en disk som finnes i definisjonsområdet for "analytisk-het"

→ Enhver potensrekke er analytisk på dens åpne konvergens-disk

- $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ er komplekst deriverbar med $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (z-z_0)^{n-1}$

  $n=0$?

  → f' eksisterer overalt og er en potensrekke med samme disk av konvergens

  ⇒ analytisk

  f'' ——— " ———

Taylorrekker

→ Hvis en funksjon er analytisk i en disk med sentrum i z_0, så har den en Taylor-representasjon i disken

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{\text{taylor-koeffisient}} (z-z_0)^n \qquad |z-z_0| < R$$

= En potensrekke der $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ med sentrum i z_0

Maclaurin-rekke: Taylor-rekke når $z_0 = 0$

Singulært punkt: Hvis $f(x)$ ikke er analytisk i et punkt, men overalt rundt dette punktet
"et lite hull i det analytiske området til $f(z)$"

Geometrisk rekke

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot k^n \qquad S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1}$$

$k < -1 \Rightarrow |k^n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ divergerer

$k > 1 \Rightarrow k^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ divergerer

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{for } |z|<1 \longrightarrow \text{Divergerer for } |z| \geq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi^n = \frac{1}{1+\xi} \qquad |\xi|<1$$

Laurent-rekker

→ Rekkerepresentasjon for $f(z)$ som er gyldig lenger vekk fra sentrum enn den nærmeste singulariteten

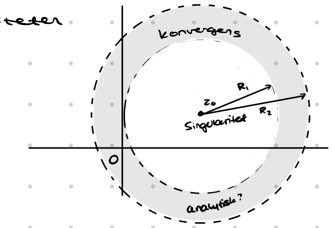
↳ Kan brukes hvis det også finnes punkter der $f(z)$ ikke er analytisk

→ Liknende Taylorrekke som inneholder både positive og negative potenser av $(z-z_0)$

→ Konvergerer i et ringområde (annulus) hvor $f(z)$ er analytisk med sentrum i z_0

→ Unik for en funksjon i et gitt ringområdet

analytisk på $\{z \in \mathbb{C} \mid R_2 < |z-z_0| < R_1\}$



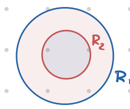
F analytisk i et ringområde (annulus, $A_{R_1,R_2}(z_0)$) med sentrum i z_0, $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$, så kan $f(z)$ representeres av en Laurentrekke:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\text{prinsipaldelen}} = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0^2) + \dots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)} + \cdots$$

hvor $b_n = a_{-n}$ $\quad \underbrace{R_1 < |z-z_0| < R_2}_{\text{konvergens}}$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-z_0)^n$$

med konvergensradius R_1 og $R_2 \in [0, \infty]$



↳ $\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} (z-z_0)^n$

?

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-0)^{-n}$

↳ Konvergerer absolutt for alle z i $A_{R_1,R_2}(z_0)$

↳ Konvergerer uniformt på enhver lukket annulus

Koeffisientene i rekken er gitt ved:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)(z-z_0)^{n+1} \, dz$$

↳ Integrasjon mot klokka rundt en lukket kurve C i ringområdet rundt z_0

Mulige utfall:

- Punktert disk med z_0 fjernet: når $R_1 = 0$ og $R_2 < \infty$
- Punktert plan med z_0 fjernet: når $R_1 = 0$ og $R_2 = \infty$
- Plan med en disk sentrert i z_0 kuttet ut av den: når $0 < R_1$ og $R_2 = \infty$

} telles som annuluser

! Kan ofte gjenkjenne et brøk-uttrykk i en funksjon som en sum av en geometrisk rekke og bruke dette for å finne en Laurent-rekke for funksjonen

Derivasjon og integrasjon av Laurent-rekker:

→ Kan deriveres eller integreres ledd-for-ledd så mange ganger vi vil i Annulusen

↳ Siden hvert ledd i rekka $a_n(z-z_0)^n$ er analytisk på annulusen og rekka konvergerer uniformt på alle del-anuluser

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_{-n}}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad \int_\gamma f'(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma (z-z_0)^n \, dz + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n}$$

Cauchy product: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ er produktet av $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$
(alle leddene multiplisert med hverandre)

Singulariteter, poler og nullpunkt

- **Nullpunkt**: punkter der funksjonsverdien er null

$f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ der z_0 er nullpunktet, m er ordenen og g er en analytisk funksjon definert i et nabolag av z_0 slik at $g(z_0) \neq 0$.

- $m=1$: enkelt nullpunkt
- isolert nullpunkt: nabolag i Ω har kun z_0 som eneste nullpunkt av f i nabologet

- **Singularitet / singulært punkt**: et punkt hvor $f(z)$ ikke er analytisk, men er analytisk i punktene omkring singulariteten

Singulariteter klassifiseres etter prinsipaldelen (den "negative" delen) av Laurentrekken:

→ Enhver analytisk funksjon kan skrives som en Laurentrekke

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\text{prinsipaldelen}}$$

- Hevbar singularitet: prinsipaldel lik 0.

  $\lim_{z \to z_0} f(z)$ eksistere med en endelig verdi

  - Kan fjernes ved å gi en verdi til funksjonen $f(z)$ i z_0 (Redefineres til å bli analytisk der) ved å sette $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$
  - $\forall k < 0 : a_k = 0$

- Pol: prinsipalverdien har et endelig antall ledd.

  $$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

  $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$

  - en pols orden er gitt av eksponenten i det siste leddet i summen ($b_m \neq 0$, $b_n = 0$ for alle $n > m \Rightarrow$ orden m)
  - grafen av $|f|$ øker til ∞ når vi går mot z_0
  - polens orden av f i z_0 er definert som ordenen av null av $\frac{1}{f}$ ved $z = z_0$ (?) → Den største negative potensen ?

  → $\exists N \in \{-1,-2,\dots\}$ $\forall k < N$ $a_k = 0$ og $a_N \neq 0$

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)$$
$$= \underbrace{\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z \cdot 2!}}_{\text{prinsipaldelen (ikke uendelig)}} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots$$

Største negativ potens $= 3$ → $m = 3$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{e^z}{(z-z_0)^3} = \frac{e^z}{z^3}$$

- Vesentlig: prinsipaldel har uendelig antall ledd
  - verken hevbar eller en pol

  → $\forall N \in \{-1,-2,\dots\}$ $\exists k \leq N$ $a_k \neq 0$

Schwartz's Lemma

f analytisk på åpen enhetsdisk $B_1(0)$ med $f(0) = 0$
f tar verdier i den lukkede enhetsdisken $\overline{B_1(0)}$
↳ tilfredsstiller $|f(z)| \leq 1$ for alle $|z| < 1$

$\Bigg\}$ $|f(z)| \leq |z|$ for alle $|z| < 1$
og $|f'(0)| \leq 1$

Residyer

C en enkel, lukket kurve
F(z) har en singularitet i z_0 innenfor C }

f(z) har en Laurentrekke (i en annulus rundt z_0):

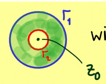
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\text{prinsipaldel}}$$

hvor koeffisienten b_1 er gitt ved integralet: $b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,dz \longrightarrow \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i b_1$

↳ kan finne b_1 ved å f.eks ta utgangspunkt i kjente rekker

ved å finne b_1 kan vi dermed regne ut integralet

b_1 kalles <u>residyet</u> til f(z) i z_0 $\quad b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ eller $\operatorname{Res}(f, z_0)$

Let f be a Laurent series defined on  with $r_2 < r < r_1$.

Then: $\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} f(z)\,dz$

→ residyen er "ballen" rundt singulariteten

Den første negative verdien i Laurentrekka?

(b_1 - leddet)

Tre metoder for å finne b_1 når z_0 er en pol:

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphic, z_0 isolated singularity.

- $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$ (for 1.ordens poler)

- $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ $\quad \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$ (for 1.ordens poler)

- $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] \right\}$ (for poler av høyere orden)

If z_0 is a pole of order N, then:

(N-1)th complex derivative

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1} (z-z_0)^N f(z)$$

Cauchys Residyteorem

f(z) analytisk på og innenfor en enkel, lukket kurve C,
unntatt et endelig antall punkter $z_1, z_2, \ldots, z_k$ innenfor C }

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

(når C omløpes mot klokka)

Beregning av reelle integral ved hjelp av komplekse integral

Bestemte integraler av trigonometriske funksjoner

$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$ hvor $F(\cos\theta, \sin\theta)$ er en rasjonal funksjon av $\cos\theta$ og $\sin\theta$ med reelle koeffisienter og hvor neuneren ikke forsvinner på intervallet $[0, 2\pi]$

→ Vil transformere det bestemte integralet til kurveintegral som kan evalueres ved residy-teorem

$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

Ved å sette $z = e^{i\theta}$ kan vi gjøre det om til en rasjonal funksjon av z

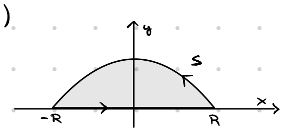
~~Ettersom~~ θ varierer i intervallet $[0, 2\pi]$, følger $z = e^{i\theta}$ enhetssirkelen $C_1(0)$ (positivt)

↳ Integrasjonen av θ fra 0 til 2π tilsvarer integrasjonen av z rundt enhetssirkelen i komplekst plan

→ Bruker residyteoremet til å finne verdien til integralet. $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{z}$ $-i\frac{dz}{z} = d\theta$

Uegentlig integral som involverer rasjonale -, eksponential- og trigonometriske funksjoner

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ hvor $f(x)$ er en rasjonal funksjon, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz$ hvor graden til neuneren er minst to høyere enn graden til telleren. (og ingen reelle røtter i neuneren ?)



1) Lag kompleks funksjon $f(z)$ ved å bytte ut x med z i $f(x)$
2) Ta utgangspunkt i det komplekse linjeintegralet $\oint_C f(z)\,dz$ (C lukket halvsirkel med radius R i det komplekse plan)
3) Linjeintegralet: sum av integral langs reelle akse fra $-R$ til R og linjeintegralet rundt den krumme delen av C

MEN: Residyteoremet:

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_S f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \underbrace{2\pi i \sum \text{Res}\, f(z)}_{\text{sum av residyer i polene innenfor } C}$$

4) La R gå mot uendelig. Bruker ML-ulikheten til å vise at:

$\int_S f(z)\,dz = 0$ (lengden av S)

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}>0} \underset{z=z_j}{\text{Res}}\, f(z)$ alle polene i øvre halvplan vil ligge innenfor C

5) Konkluderer med at... ? hvor summen er over residyene i alle poler i øvre halvplan

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ hvor $f(x)$ er en eksponentialfunksjon, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^{bx}+c}\,dx$, hvor $0 < a < b$, $c > 0$

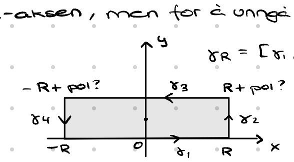
Neuneren forsvinner ikke, siden $c > 0$ og $e^{bx} > 0$. Siden $a > b$ er integralet konvergent nær $+\infty$

Integranden er bundet av $\frac{e^{ax}}{c}$, og dermed er den også integrerbar nær $-\infty$

→ for å evaluere integraler som involverer eksponentialfunksjoner bruker vi rektangulære kurver

1) Definer en (analytisk) kompleks funksjon ved å bytte ut x med z, eller x med e^t. Finne polene?
2) Velg integrasjonskurven. Ekspanderer i x-aksen for å dekke hele x-aksen, men for å unngå uendelig mange poler på y-aksen ekspanderer vi ikke kurven på øvre halvplan (?) $\gamma_R = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$

Bruker rektangulær kurve γ_R, som inneholder $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ og γ_4



3) Bruker residyteoremet
4) Vise at integralene på vertikal side går mot 0 når $R \to \infty$

Bruker ML-ulikheten for path-integrals

5) Lager det ønskede integralet

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ hvor $f(x)$ er en rasjonal funksjon med trigonometriske verdier $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(ax)\,dx$

→ metoden er lik forrige ↗ Husk: $\cos(ax) = \text{Re}(e^{iax})$, $\sin(bx) = \text{Im}(e^{ibx})$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(ax)\,dx$

Fourier

Argumentprinsippet

Counting teorem

C enkel, lukket, positivt orientert path
Ω region innenfor C
f analytisk innenfor og på C og ikke-forsvinnende
N(f) antall null av f inni Ω (telt ift. multiplisitet)

(teller antall nuller i en analytisk funksjon i en path)

$$N(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

Meromorfisk counting-teorem

C enkel, lukket, positivt orientert path
Ω region innenfor C
f meromorfisk på Ω og analytisk og ikke-forsvinnende på C
N(f) antall null av f inni Ω (telt ift. multiplisitet)
P(f) antall poler av f inni Ω (telt ift. multiplisitet)

N(f) og P(f) er endelige og:

$$N(f) - P(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

Argument-principle

$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ kan bli sett på som endring i argument ettersom man beveger seg rundt bildeveien f[C].

f analytisk og ikke-forsvinnende på et enkeltsammenhengende område Ω
$\Rightarrow$ eksisterer en analytisk gren av logaritmen, $\log f = \ln|f| + i \arg f$, slik at alle $f \subset \Omega$:

$$\frac{d}{dz} \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f$$

Fourier-rekker

→ Egner seg til å representere periodiske funksjoner.

$f(x) = f(x + n\cdot p)$ hvor $n = 1,2,3,\dots$, p = perioden til $f(x)$

Fourier-rekka til $f(x)$ med periode $p = 2L$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Like funksjon (cos) med $p = 2L$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Odde funksjon (sin) med $p = 2L$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Fra boka:

Huis f er kontinuerlig deriverbar på intervallet $[0, 2\pi]$: $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt \rightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$

Fourier-koeffisient: $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)\,dx$

Fourier-rekke: $Sf(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$

↳ N'te partielle sum av Fourier-rekka til f: $S_N f(x) = \sum_{j=-N}^{N} \hat{f}(j)e^{ijx}$

Sf konvergerer til f i x hvis $S_N f(x) \longrightarrow f(x)$

↳ Dersom f er på formen: $f(x) = \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{ijt} \rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-N}^{N} a_j \int_0^{2\pi} e^{i(j-n)t}\,dt$

$j = n \Rightarrow$ $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$

Bessels ulikhet: f^2 integrerbar: $\sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$

Dirichlet-kjernen: f integrerbar: $S_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x-t)f(t)\,dt$ hvor $D_N(t) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}$

f integrerbar på intervallet $[-\pi, \pi]$:

Fourier-koeffisientene:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n \geq 1$$

$f(x) = x$: $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{-int}\,dt \rightarrow a_n = -\frac{1}{in} \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-1}{in}e^{int}$

$f(x) = |x|$:

Fourierintegral

→ Funksjonen må være kontinuerlig og deriverbar

→ En fourierrekke blir til et integral når L ($p = 2L$) går mot uendelig

1) $f(x) = \int_0^\infty [A(\omega)\cos \omega x + B(\omega)\sin \omega x]\, d\omega$

2) $A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos \omega v\, dv$

3) $B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin \omega v\, dv$

Komplekst:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{i\omega(x-v)}\, dv\, d\omega$$

(Husk: $e^{it} = \cos t + i\sin t$)

- Like funksjon → cosinusintegral ($B(\omega) = 0$):
  $f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos \omega x\, d\omega$ $\quad A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos \omega v\, dv$

- Odde funksjon → sinusintegral: ($A(\omega) = 0$):
  $f(x) = \int_0^\infty B(\omega)\sin \omega x\, dv$ $\quad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin \omega v\, dv$

odde	· odde	=	like
like	· like	=	odde
odde	· like	=	odde

→ Derivasjon av en Fourier-rekke: deriverer ledd for ledd.

Fourier-transformasjon

Fouriertransformasjon: $\hat{f}(\omega) = F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$

Invers Fouriertransformasjon: $f(x) = F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$

dersom $f(x)$ trinnvis kont. og integrerbar fra $-\infty$ til ∞

Fourier cosinustransformasjon: $\hat{f}_c(\omega) = F_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos \omega x\, dx$

invers: $f(x) = F_c^{-1}\{\hat{f}_c(\omega)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)\cos \omega x\, d\omega$

derivert: $F_c\{f'(x)\} = \omega F_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$ $\qquad F_c\{f''(x)\} = -\omega^2 F_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$

Fourier sinustransformasjon: $\hat{f}_s(\omega) = F_s\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin \omega x\, dx$

invers: $f(x) = F_s^{-1}\{\hat{f}_s(\omega)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(\omega)\sin \omega x\, d\omega$

derivert: $F_s\{f'(x)\} = -\omega F_c\{f(x)\}$ $\qquad F_s\{f''(x)\} = -\omega^2 F_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(0)$

$$F\{f'(x)\} = i\omega \hat{f}(\omega)$$

$$F\{f''(x)\} = -\omega^2 \hat{f}(\omega)$$

Varmelikningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 d}{\partial x^2}$$

Bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Harmoniske funksjoner og anvendelse (LaPlace)

→ **Harmonisk funksjon**: En real-valued funksjon u definert på en åpen delmengde Ω i det komplekse planet som har kontinuerlig partielle deriverte av første og andre grad, og tilfredsstiller:

Laplace likning: $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ for alle (x,y) i Ω

→ De reelle og imaginære delene av analytiske funksjoner definert på åpne mengder er harmoniske

Konjugent gradient

$\phi = u_x - u_{iy}$ kalles konjugat gradient av u for harmonisk funksjon u på Ω

Harmonisk konjugert

v er harmonisk konjugert av u hvis de er harmoniske funksjoner som tilfredsstiller Cauchy-Riemann på en åpen mengde Ω → $f = u + iv$ er analytisk i Ω

Middelverdi og maks-/min prinsipp

Gauss' middelverdi-egenskap

u harmonisk funksjon på område Ω

z er i Ω

Den lukkede disken $\overline{Br(z)}$ $(r>0)$ er i Ω

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{it})\,dt$$

Maximum og minimum modul-prinsipp

u harmonisk funksjon på område Ω

u har et maksimum eller minimum i Ω

⇒ u er konstant i Ω